第11講　無限級数

11

［A］　次の無限級数の収束・発散を調べよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

［B］　正数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件 $\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n$ を満たしているとする．このとき，数列 $\left\{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ．また，収束する場合，その極限値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　無限級数

11　次の無限級数の収束・発散を調べよ．ただし，必要であれば自然数 n に対して $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2(\sqrt{n}-1)$ が成り立つことを用いてよい．

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　無限級数

11

［A］　次の無限級数の収束・発散を調べよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

［B］　正数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n$ を満たしているとする．このとき，数列 $\left\{\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ．また，収束する場合，その極限値を求めよ．

【答】［A］　発散する

［B］　収束する r の範囲　$r\geqq\dfrac{3}{2}$，極限値 $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \left(r=\dfrac{3}{2}\right)\\ 0 & \left(r>\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$

【解説】

［A］　$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフより面積の大小に注目すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}+\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

が成り立つが，$\dfrac{1}{n}+\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}+\Big[\log x\Big]_1^n=\log n+\frac{1}{n}\to\infty$ $(n\to\infty)$ より与式は**発散する**.

［B］
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき

$$①\iff a_1{}^2=1^2+2\times1\qquad\therefore\quad a_1=\sqrt{3}$$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n{}^2&=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n=\sqrt{2n+1}\ （これは\ n=1\ のときも成り立つ）$$

よって

$$\int_0^n\sqrt{2x+1}\,dx<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k+1}<\int_1^{n+1}\sqrt{2x+1}\,dx$$

$$\iff\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^n<\sum_{k=1}^{n}a_k<\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{n+1}$$

$$\iff\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3}$$

$$\iff\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}<\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n^r}<\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3n^r}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで

$$\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}=\frac{n^{\frac{3}{2}}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}}{3n^r}$$

$$=\frac{1}{3}n^{\frac{3}{2}-r}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}\quad\cdots\cdots(*)$$

となるが $\frac{3}{2}-r>0$ つまり $r<\frac{3}{2}$ のとき

$$(*)\to\infty \text{ より}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}=\infty$$

となり収束しない.

$\frac{3}{2}-r=0$ つまり $r=\frac{3}{2}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(2+\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\frac{3}{2}-r<0$ つまり $r>\frac{3}{2}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^{r-\frac{3}{2}}}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^{r-\frac{3}{2}}}\left\{\left(2+\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}=0$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ゆえに収束する r の範囲は $r \geqq \dfrac{3}{2}$ で，そのときの極限値は

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \left(r=\dfrac{3}{2}\right) \\ 0 & \left(r>\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　無限級数

11　次の無限級数の収束・発散を調べよ．ただし，必要であれば自然数 n に対して $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2(\sqrt{n}-1)$ が成り立つことを用いてよい．

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

【答】　発散する

【解説】

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフより面積の大小に注目すると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

が成り立つが，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}+\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}+2(\sqrt{n}-1)\to\infty$ $(n\to\infty)$ より与式は**発散する**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。